KULTUSMINISTER KONFERENZ

Bildungsstandards für das Fach Mathematik
Primarbereich

(Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004,
i.d.F. vom 23.06.2022)

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland

Taubenstraße 10 · 10117 Berlin
Postfach 11 03 42 · 10833 Berlin
Tel.: 030 25418-499

Graurheindorfer Straße 157 · 53117 Bonn
Postfach 22 40 · 53012 Bonn
Tel.: 0228 501-0

Einleitung

Die Gesamtstrategie der Kultusministerkonferenz (KMK) zum Bildungsmonitoring in Deutschland sieht vor, durch die Einführung von gemeinsamen Bildungsstandards für Transparenz schulischer Anforderungen zu sorgen, die Entwicklung eines kompetenzorientierten Unterrichts zu fördern und eine Grundlage für die Überprüfung der erreichten Ergebnisse zu schaffen. Das von der KMK gewählte Konzept von Bildungsstandards legt fest, welche fachbezogenen Kompetenzen Schülerinnen und Schüler bis zum Ende eines bestimmten Abschnitts in der Schullaufbahn entwickelt haben sollen. Unter einer Kompetenz wird dabei die Fähigkeit verstanden, Wissen und Können in den jeweiligen Fächern zur Lösung von Problemen anzuwenden. Die in den Bildungsstandards definierten Kompetenzen werden durch Beschreibungen von Anforderungen konkretisiert und anhand von Lernaufgaben illustriert. Die Bildungsstandards konzentrieren sich auf die zentralen fachlichen Kompetenzen. Beschreibungen und Konkretisierungen fachübergreifender Bildungs- und Erziehungsziele erfolgen außerhalb der fachbezogenen Bildungsstandards.

Als schulstufen- bzw. abschlussbezogene und in allen Ländern verbindliche Zielvorgaben bilden die Bildungsstandards der KMK eine wichtige Grundlage für die Entwicklung und Sicherung von Bildungsqualität in den Schulen. Sie sollen schulische Lehr- und Lernprozesse auf eine kumulative und systematisch vernetzte Entwicklung von Kompetenzen orientieren, die auch für zukünftige Bildungsprozesse der Schülerinnen und Schüler bedeutsam sind. Weiterhin sollen sie dazu beitragen, die Durchlässigkeit von Bildungswegen und die Vergleichbarkeit von Abschlüssen sicherzustellen. Flankiert von geeigneten Implementierungs- und Unterstützungsmaßnahmen bilden Bildungsstandards eine Basis für eine systematische Weiterentwicklung des Bildungssystems.

Bei den in Deutschland eingeführten Bildungsstandards handelt es sich um Regelstandards, die angeben, welches Kompetenzniveau Schülerinnen und Schüler im Durchschnitt in einem Fach erreichen sollen. Bereits in den Jahren 2003 und 2004 hat die KMK Bildungsstandards für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4), den Ersten Schulabschluss (damals Hauptschulabschluss, Jahrgangsstufe 9) und den Mittleren Schulabschluss (Jahrgangsstufe 10) verabschiedet. Sie bilden seither verbindliche normative Referenzpunkte für die länderspezifischen curricularen Vorgaben und die Orientierung des Unterrichts, für die Ausgestaltung von Prüfungen und im Rahmen der KMK-Strategie zum Bildungsmonitoring für die Überprüfung der Standarderreichung mit länderübergreifenden Testverfahren (VERA und IQB-Bildungstrend).

Mit einer Bedarfsanalyse hat die KMK im Jahr 2019 überprüft, inwieweit die vorliegenden Bildungsstandards einer Weiterentwicklung bedürfen. Unter breiter Beteiligung von Fachexpertinnen und -experten aus den Ländern und Vertreterinnen und Vertretern der jeweiligen Fachdidaktiken wurde im Rahmen der Bedarfsanalyse insgesamt ein mittelgroßer bis hoher Überarbeitungsbedarf festgestellt. Aufgrund dieses Befundes hat die KMK am 18. Juni 2020 beschlossen, alle Bildungsstandards für den Primarbereich und die Sekundarstufe I weiterzuentwickeln. Für die Fächer Deutsch und Mathematik werden diese nun vorgelegt.

Nach mehr als zehn Jahren liegen für die Bildungsstandards umfangreiche Implementierungserfahrungen auf unterschiedlichen Ebenen vor, die eine realistische

Einschätzung dessen ermöglichen, was sich bewährt hat und umsetzbar ist. In nicht wenigen Fällen ist daher eine deutlich weitergehende Konkretisierung der Standardformulierungen und damit Stärkung ihrer Orientierungsfunktion möglich. Die nun vorliegenden Kompetenzbeschreibungen haben deshalb im Vergleich zu den früheren Vorgaben in vielen Bereichen eine Präzisierung erfahren.

Die nun vorgelegten Bildungsstandards gewährleisten eine deutlich höhere stufenübergreifende Konsistenz. Dies ist unter anderem für die Lehrplanarbeit wichtig, die eine Verständigung über fachspezifische Übergänge gewährleisten muss, und auch für die pädagogische Praxis von Lehrkräften, die in ihrer Unterrichtsplanung Passungen zwischen Schulstufen herstellen müssen. Die Gelegenheit der Weiterentwicklung der Standards für den Primarbereich und die Sekundarstufe I wurde deshalb genutzt, um sowohl die stufenübergreifende Progression der Anforderungen als auch die Konsistenz von Konzepten und Begriffen zu optimieren, auch mit Blick auf den Übergang zur Sekundarstufe II.

Mit der Strategie „Bildung in der digitalen Welt“ hat die KMK 2016 einen Rahmen für Kompetenzen in der digitalen Welt formuliert, also für Anforderungen, die Kinder und Jugendliche in einer zunehmend digital orientierten bestimmten Welt zu bewältigen haben. Im Jahr 2021 hat die KMK die Strategie mit der Empfehlung „Lehren und Lernen in der digitalen Welt“ ergänzt. Demnach ist die Berücksichtigung veränderter Bedingungen des Lehrens und Lernens im Kontext digitalen Wandels Aufgabe aller Fächer. Die vorliegenden Bildungsstandards nehmen diese Anforderung konsequent auf, indem die Strukturmodelle und die Standardformulierungen mit Blick auf die domänenspezifischen Erwartungen an den Kompetenzerwerb in der digitalen Welt weiterentwickelt wurden. Dabei werden die unterschiedlichen fachspezifischen Voraussetzungen berücksichtigt.

In den Fächern, für die Bildungsstandards vorliegen, wird auch am Erwerb von Kompetenzen gearbeitet, die für andere Fächer und über die Fachgrenzen hinweg bei der Bearbeitung von grundsätzlich überfachlichen Aufgaben der Schule von Bedeutung sind.

Die Anforderungen der weiterentwickelten Bildungsstandards werden – wie bisher – durch illustrierende Aufgabenbeispiele konkretisiert, die separat online publiziert werden, um sie künftig ggf. in kürzeren Intervallen aktualisieren zu können. Die Sammlung umfasst klassische Aufgabenformate sowie solche, die innovative didaktische Entwicklungen auch unter Rückgriff auf digitale Medien aufgreifen. Diese Aufgaben, die von erfahrenen Lehrkräften der Länder in Kooperation mit Fachdidaktikerinnen und Fachdidaktikern erarbeitet wurden, zeigen beispielhaft, welche Aufgabenstellungen dazu geeignet sein können, die jeweiligen Kompetenzen bei Schülerinnen und Schülern im Unterricht zu entwickeln. Es handelt sich dabei also um Lernaufgaben, nicht um Prüfungs- oder Testaufgaben. Sie sollen aktive Lernprozesse anstoßen und diese durch eine Folge von gestuften Aufgabenstellungen steuern. Komplexere Lernaufgaben zielen überdies darauf ab, die Steuerung der Aufgabenbearbeitung auf die Lernenden zu übertragen.

In den Einleitungen zu den einzelnen Lernaufgaben wird kurz dargestellt, welche Bildungsstandards sie illustrieren, wie die Aufgaben weiteren Strukturierungsmerkmalen von Kompetenzen im jeweiligen Fach zuzuordnen sind und inwiefern die Aufgaben besonders geeignet sind, die Zielkompetenzen zu entwickeln. Dabei ist zu berücksichtigen, dass es sich bei den Lernaufgaben nicht um komplette Unterrichtseinheiten handelt, die auf eine umfassende Bearbeitung des jeweiligen Materials abzielen, sondern um ausgewählte

Aufgabenstellungen, die gezielt einzelne Kompetenzbündel exemplarisch in den Blick nehmen.

Die vorliegenden Bildungsstandards gelten für den Primarbereich. Bei der Umsetzung der Bildungsstandards im Unterricht muss selbstverständlich die Heterogenität der Schülerinnen und Schüler berücksichtigt werden, die unter anderem mit ihrem sozialen und kulturellen Hintergrund, ihrer Herkunftssprache und ihrem Geschlecht verbunden ist. Ziel sollte sein, mithilfe von geeigneten Strategien der Planung, Gestaltung und Weiterentwicklung des Unterrichts sowie schulischer Unterstützungsangebote die Voraussetzungen zu schaffen, dass alle Schülerinnen und Schüler die Bildungsstandards in der Regel erreichen können. In einem inklusiven Unterricht ist darüber hinaus zu klären, wie die Anforderungen an die individuellen Lernvoraussetzungen der Schülerinnen und Schüler anzupassen sind. Für zieldifferent unterrichtete Kinder und Jugendliche sind die Bildungsstandards nicht im vollen Umfang maßgeblich.

Das vorliegende Dokument wurde vom IQB in Zusammenarbeit mit Fachexpertinnen und Fachexperten der Länder, Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern in den relevanten fachdidaktischen Bereichen sowie in enger Abstimmung mit einer von der KMK eingesetzten Steuerungsgruppe erstellt. Vorläufige Fassungen wurden von den Ländern mehrfach kommentiert und im Schulausschuss der KMK und in der Amtschefskommission „Qualitätssicherung in Schulen“ beraten. Am 13.12.2021 fand zu den Entwürfen ein Fachgespräch mit Vertreterinnen und Vertretern der Lehrkräfte- und Fachverbände statt. Viele der Änderungsvorschläge wurden in der weiteren Überarbeitung der Bildungsstandards aufgegriffen und umgesetzt. Das Resultat dieses komplexen Verständigungsprozesses über die Kompetenzen, die Kinder und Jugendliche im Fach Mathematik im Primarbereich erwerben sollen, bilden die vorliegenden Bildungsstandards. Sie wurden am 23.06.2022 vom Plenum der Kultusministerkonferenz verabschiedet.

Die Darstellung der Bildungsstandards in den einzelnen Fächern folgt einer einheitlichen Gliederung. So weit wie möglich wurde versucht, kohärente Konzepte und Begriffe zu verwenden, ohne dabei jedoch die Besonderheiten der Fächer zu verkennen.

In der *Fachpräambel* werden zunächst die allgemeinen Ziele des jeweiligen Faches beschrieben. Dabei wird nicht nur auf die Rolle des Faches für übergreifende Ziele schulischer Bildungsprozesse eingegangen, sondern auch auf die Frage, welche allgemeinen Kompetenzen Schülerinnen und Schüler im jeweiligen Fach entwickeln sollen. Weiterhin wird in diesem Abschnitt erläutert, von welchen fachdidaktischen bzw. fachbezogenen bildungstheoretischen Grundlagen die Bildungsstandards im jeweiligen Fach ausgehen und welche Rolle Bildung in der digitalen Welt im jeweiligen Fach spielt. Die Bildungsstandards orientieren sich am aktuellen Stand fachdidaktischer Forschung und Diskussionen und setzen auch innovative Impulse. Ferner werden in den Fachpräambeln die Kompetenzbereiche und ihre Struktur beschrieben, auf die sich die Bildungsstandards beziehen. Die Kompetenzbereiche werden grafisch dargestellt und jeweils kurz beschrieben.

Den Kern des Dokumentes bildet die *Darstellung der Bildungsstandards*, die zunächst allgemein eingeführt werden. Es wird beschrieben, welche Aspekte des Wissens und Könnens der jeweilige Kompetenzbereich umfasst und wie diese miteinander zusammenhängen. Anschließend folgt die Auflistung der Kompetenzen, die die Schülerinnen und Schüler entwickeln sollen. Diese sind in Form von Anforderungen formuliert, die Schülerinnen und

Schüler am Ende der jeweiligen Jahrgangsstufe bewältigen können sollen. Insgesamt beschreiben die Bildungsstandards, über welche Kompetenzen Schülerinnen und Schüler in der Regel verfügen sollen, wenn sie den Primarbereich verlassen.

Damit Bildungsstandards ihre angestrebte Wirksamkeit entfalten können, müssen diese von den verschiedenen Akteuren im Bildungssystem aufgegriffen und umgesetzt werden. Dies betrifft die Bildungspolitik, die Bildungsadministration, die Lehrkräfteaus- und Lehrkräfteweiterbildung sowie die Schulpraxis. Die Länder werden daher Strategien entwickeln und umsetzen, die darauf abzielen, die Erreichung der vereinbarten Zielvorgaben zu gewährleisten. Das Erreichen der Bildungsstandards für den Primarbereich wird länderübergreifend erstmals im Rahmen des IQB-Bildungstrends 2027 überprüft werden. Die Studien dienen dazu, den Ländern Rückmeldung darüber zu geben, inwieweit die angestrebten Kompetenzen entwickelt werden konnten.

1. Der Beitrag des Faches Mathematik zur Bildung

Auftrag des Primarbereichs ist die Entfaltung grundlegender Bildung. Sie ist Basis für weiterführendes Lernen und für die Fähigkeit zur selbstständigen Kulturaneignung. Dabei ist die Förderung der mathematischen Kompetenzen ein wesentlicher Bestandteil dieses Bildungsauftrags.
Mathematikunterricht trägt zur Bildung der Schülerinnen und Schüler bei, indem er ihnen insbesondere folgende Grunderfahrungen ermöglicht, die miteinander in engem Zusammenhang stehen:

- Mathematik als Werkzeug, um Erscheinungen der Welt aus Natur, Gesellschaft, Kultur, Beruf und Arbeit in einer spezifischen Weise wahrzunehmen und zu verstehen,
- Mathematik als geistige Schöpfung und auch deduktiv geordnete Welt eigener Art,
- Mathematik als Mittel zum Erwerb von auch über die Mathematik hinausgehenden, insbesondere heuristischen Fähigkeiten.

Der Mathematikunterricht des Primarbereichs greift die frühen mathematischen Erfahrungen der Kinder auf, vertieft, systematisiert und erweitert sie und entwickelt aus ihnen grundlegende mathematische Kompetenzen. Auf diese Weise wird die Grundlage für das Mathematiklernen in den weiterführenden Schulen und für die lebenslange Auseinandersetzung mit mathematischen Anforderungen des täglichen Lebens geschaffen.
Anschlussfähiges, vernetztes und nachhaltiges Lernen von Mathematik wird unterstützt, wenn sich die Auseinandersetzung mit Inhalten an zentralen **Leitideen** orientiert. In den Vordergrund gestellt werden **prozessbezogene** (bzw. allgemeine) und **inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen**, die für das Mathematiklernen und die Mathematik insgesamt charakteristisch sind. Diese sind untrennbar miteinander verknüpft. Die zentralen Sachgebiete des Mathematikunterrichts Arithmetik, Geometrie, Größen und Sachrechnen werden dabei implizit aufgegriffen und verknüpft.

Abbildung 1: Grafische Darstellung des Zusammenwirkens von prozessbezogenen und inhaltsbezogenen Kompetenzen mit Fokussierung auf die Prozessbezogenen Kompetenzen

Das Ziel des Mathematiklernens im Primarbereich ist die Entwicklung eines gesicherten Verständnisses mathematischer Inhalte und umfasst wesentlich mehr als die Aneignung von Kenntnissen und Fertigkeiten. Die prozessbezogenen Kompetenzen verdeutlichen, dass die

Art und Weise der Auseinandersetzung mit mathematischen Fragen ein wesentlicher Teil der Entwicklung mathematischer Grundbildung ist. Deren Entwicklung hängt nicht nur davon ab, welche Inhalte unterrichtet werden, sondern in mindestens gleichem Maße davon, wie sie unterrichtet werden und inwiefern sich der Mathematikunterricht an den Lernergebnissen und Lernprozessen der Schülerinnen und Schüler orientiert. Für die Gestaltung des Mathematikunterrichts ist es daher bedeutsam, dass den Schülerinnen und Schülern Gelegenheit gegeben wird, selbst Probleme zu lösen, über Mathematik zu kommunizieren, mathematische Inhalte darzustellen und zu begründen, mathematische Sachverhalte zu modellieren und mit mathematischen Objekten und Werkzeugen zu arbeiten.
Dies geschieht in einem Unterricht, der aufbauend auf Alltagserfahrungen und Vorwissen selbstständiges Lernen, die Entwicklung von kommunikativen Fähigkeiten und Kooperationsbereitschaft sowie eine zeitgemäße Informationsbeschaffung, Dokumentation und Präsentation von Lernergebnissen zum Ziel hat. Unterricht, der sich an den Bildungsstandards orientiert, nimmt die Lernprozesse und Lernergebnisse der Schülerinnen und Schüler in den Blick und geht konstruktiv mit Fehlern und Präkonzepten um. Ebenso wird ermöglicht, individuelle Lernwege zu entwickeln und für das weitere Lernen zu nutzen, damit mathematisches Wissen flexibel und mit Einsicht in vielfältigen kontextbezogenen Situationen angewendet werden kann. Unterricht in Mathematik muss die verschiedenen Vorerfahrungen und Bedürfnisse der Schülerinnen und Schüler einbeziehen und alle Lernenden dazu ermutigen, Interesse an mathematischen Zusammenhängen zu gewinnen und selbstbewusst und kreativ ihre individuellen Fähigkeiten und Entwicklungspotenziale zu nutzen. Dadurch kann Inklusion im Mathematikunterricht realisiert werden.
Die prozessbezogenen Kompetenzen sind mit entscheidend für den Aufbau positiver Einstellungen und Grundhaltungen zum Fach. In einem Mathematikunterricht, der diese Kompetenzen in den Mittelpunkt des unterrichtlichen Geschehens rückt, wird es besser gelingen, die Freude an der Mathematik und die Entdeckerhaltung aller Schülerinnen und Schüler zu fördern und weiter auszubauen.
Die Bildungsstandards beschreiben die prozessbezogenen und inhaltsbezogenen Kompetenzen, die Schülerinnen und Schüler am Ende von Jahrgangsstufe 4 erworben haben sollen (s. Abschnitte 3 und 4). Erwartet wird, dass die Schülerinnen und Schüler diese Kompetenzen in außermathematischen („Anwendungsorientierung“) und in innermathematischen („Strukturorientierung“) Kontexten nutzen können. Die Beschreibungen der prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen sollen Lehrkräfte bei aller notwendigen Offenheit für die individuellen kindlichen Prozesse der Aneignung von Mathematik eine klare Perspektive für die anzustrebenden Ziele aufzeigen. Damit die Anschlussfähigkeit der in der Primarstufe zu erwerbenden Kompetenzen an die Sekundarstufe deutlich wird, werden die prozessbezogenen und inhaltsbezogenen Kompetenzen in den Bildungsstandards beider Schulstufen kohärent dargestellt.

Beim Erwerb prozess- und inhaltsbezogener Kompetenzen lassen sich drei **Anforderungsbereiche** unterscheiden, die für alle Schülerinnen und Schüler in der aktiven Auseinandersetzung mit mathematischen Anforderungen bedeutsam sind und unterschiedliche kognitive Ansprüche mathematischer Aktivitäten beschreiben: Reproduzieren, Zusammenhänge herstellen sowie Verallgemeinern und Reflektieren (s. Abschnitt 2).

Die Bildungsstandards konzentrieren sich auf zentrale fachliche Zielsetzungen des Mathematikunterrichts. Aspekte der Förderung sozialer und personaler Kompetenzen werden hier nicht explizit angesprochen, sind aber gleichwohl unverzichtbarer Bestandteil grundlegender Bildung im Primarbereich und somit auch des Mathematikunterrichts.

Die zentralen fachlichen Zielsetzungen des Mathematikunterrichts beinhalten auch Kompetenzen, die für eine aktive, selbstbestimmte Teilhabe der Schülerinnen und Schüler in der **digitalen Welt** erforderlich sind. Dadurch leistet das Fach Mathematik einen wichtigen Beitrag bei der Vermittlung von Kenntnissen sowie der Entwicklung von Fertigkeiten und Fähigkeiten für die Orientierung in der durch Digitalisierung geprägten Gesellschaft.
Im Mathematikunterricht kann der Anspruch auf Bildung in und für die digitale Welt realisiert werden, indem (1) fachliche Kompetenzen (unter anderem auch) digital gefördert werden, (2) wichtige informatische Kompetenzen für eine Teilhabe in der digitalen Welt „unplugged“, d.h. in nicht-informatischen Kontexten, gefördert werden und (3) fachliche Kompetenzen für die kritische Reflexion und Einordnung von Informationen in verschiedenen Darstellungen genutzt werden.
Die Schülerinnen und Schüler lernen Möglichkeiten kennen, mathematikspezifische digitale Werkzeuge zu nutzen, mit denen sie mathematische Sachverhalte veranschaulichen können (z. B. digitale Werkzeuge zum räumlichen Vorstellungsvermögen, zur Darstellung von Daten). Bei der Gestaltung des Unterrichts werden darüber hinaus die Potenziale allgemeiner digitaler Medien und Lernumgebungen genutzt (z. B. Videos, Textverarbeitung, Präsentationsmedien), um kooperatives, kreatives, prozess- und produktionsorientiertes Lernen zu fördern und die Schülerinnen und Schüler an einen zunehmend selbstständigen und kritisch hinterfragenden Umgang mit digitalen Medien heranzuführen.
Zu den informatischen Kompetenzen, die in nicht-informatischen Kontexten im Mathematikunterricht in der Primarstufe gefördert werden können, zählen insbesondere das strukturierte Zerlegen und Lösen sowie das konstruktive und kreative Modellieren von Problemen, das Strukturieren und Darstellen von Informationen in unterschiedlichen Repräsentationen sowie das kritische Interpretieren von Informationen, das Verstehen und Anwenden von Algorithmen, von symbolischer und formaler Sprache. Die prozessbezogenen und inhaltsbezogenen Kompetenzen, die in diesem Sinne zu einer informatischen Grundbildung gehören, werden im Folgenden explizit ausgewiesen (blaue Schattierung).
Vor allem die Förderung mathematischer Kompetenzen, die einen kritischen Umgang mit Daten und Informationen ermöglichen, tragen dazu bei, dass die Schülerinnen und Schüler eine auf die Übernahme von Verantwortung begründete Lernhaltung entwickeln und zu einem selbstständigen und mündigen Leben in einer digitalen Welt befähigt werden.

Hinweis:

Einige der in den Bildungsstandards beschriebenen Kompetenzen werden durch Angaben, die mit "z. B." eingeleitet sind, näher erläutert. Hierbei handelt es sich immer um fakultative, exemplarisch gemeinte Hinweise.

2. Anforderungsbereiche

Der Erwerb prozess- und inhaltsbezogener Kompetenzen erfolgt in der aktiven Auseinandersetzung mit mathematischen Aufgabenstellungen und Anforderungen. Diesbezüglich lassen sich drei Anforderungsbereiche unterscheiden: Reproduzieren, Zusammenhänge herstellen sowie Verallgemeinern und Reflektieren. Im Allgemeinen nehmen Anspruch und kognitive Komplexität von Anforderungsbereich I bis Anforderungsbereich III zu. Die Auseinandersetzung mit Aufgabenstellungen zu allen drei Anforderungsbereichen ist für alle Schülerinnen und Schüler – unabhängig vom mathematischen Leistungsvermögen – von zentraler Bedeutung, um erfolgreich und nachhaltig prozessbezogene und inhaltsbezogene Kompetenzen auf- und auszubauen.
Die Anforderungsbereiche sind wie folgt charakterisiert:

Anforderungsbereich I: Reproduzieren
Wiedergabe von Grundwissen, Ausführen von Routinetätigkeiten und direkte Anwendung von grundlegenden Begriffen und Verfahren

Anforderungsbereich II: Zusammenhänge herstellen
Erkennen mathematischer Zusammenhänge und Verknüpfen von Kenntnissen, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung mathematischer Aufgabenstellungen

Anforderungsbereich III: Verallgemeinern und Reflektieren
Übertragen von Erkenntnissen auf unbekannte Fragestellungen sowie Entwickeln und Reflektieren von Strategien, Begründungen und Folgerungen

3. Prozessbezogene Kompetenzen

Prozessbezogene Kompetenzen zeigen sich in der lebendigen Auseinandersetzung mit Mathematik und auf die gleiche Weise – in der tätigen Auseinandersetzung – werden sie erworben. Die angestrebten Formen der Nutzung von Mathematik müssen daher auch regelmäßig genutzte Formen des Mathematiklernens sein. Von zentraler Bedeutung für eine erfolgreiche Nutzung und Aneignung von Mathematik sind vor allem die folgenden sechs prozessbezogenen Kompetenzen.

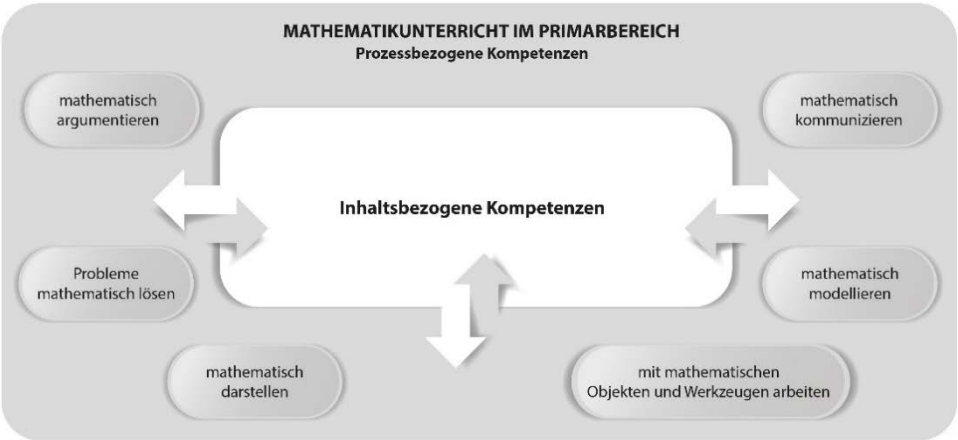

Abbildung 2: Grafische Darstellung des Zusammenwirkens von prozessbezogenen und inhaltsbezogenen Kompetenzen;

Diese lassen sich für Schülerinnen und Schüler am Ende von Jahrgangsstufe 4 wie folgt konkretisieren (die Reihenfolge der Auflistung gibt keine Gewichtung vor):

Mathematisch argumentieren

Beim mathematischen Argumentieren in der Primarstufe entwickeln Schülerinnen und Schüler ein Bewusstsein für strittige Fragen zu mathematischen Gegenständen und ein Bedürfnis, diese überzeugend aufzuklären. Hierzu hinterfragen und prüfen sie Aussagen ebenso wie sie Vermutungen und Begründungen zu mathematischen Zusammenhängen aufstellen. Das Spektrum reicht dabei vom beispielgebundenen Prüfen und Widerlegen von Vermutungen bis hin zum Nachvollziehen und Entwickeln von verallgemeinernden inhaltlich-anschaulichen Überlegungen zu mathematischen Zusammenhängen.

Die Schülerinnen und Schüler

- hinterfragen mathematische Aussagen und prüfen diese auf Korrektheit,
- stellen Vermutungen zu mathematischen Zusammenhängen auf,
- formulieren Begründungen und vollziehen Begründungen anderer nach.

Mathematisch kommunizieren

Beim mathematischen Kommunizieren verständigen sich Schülerinnen und Schüler mündlich oder auch schriftlich und mit Hilfe geeigneter Medien über mathematische Bearbeitungen, treffen darüber fachliche Absprachen und gehen inhaltlich aufeinander ein. Das Spektrum reicht vom Präsentieren, Beschreiben und strukturierten Darlegen eigener mathematischer Überlegungen bis hin zum verständlichen Erläutern von Zusammenhängen zwischen mathematischen Objekten und zum Nachvollziehen und kritischen Hinterfragen von Erläuterungen und Erklärungen anderer.

Die Schülerinnen und Schüler

- beschreiben und erklären (auch unter Nutzung geeigneter Medien) Überlegungen zu mathematischen Sachverhalten, Lösungswege und Ergebnisse adressatengerecht,
- erläutern mathematische Zusammenhänge,
- vollziehen Lösungen und Lösungswege anderer nach, hinterfragen und entwickeln diese gemeinsam weiter.

Probleme mathematisch lösen

Diese Kompetenz zielt darauf, dass Schülerinnen und Schüler mathematische Aufgabenstellungen bearbeiten, die mit vorhandenen Kenntnissen und Fähigkeiten nicht routiniert gelöst werden können. Das Spektrum an Kompetenzen reicht vom Erkennen mathematischer Probleme und dem kreativen Entwickeln neuartiger Lösungsideen über das Auswählen geeigneter heuristischer Strategien und Hilfsmittel bis hin zum kritischen Reflektieren und Adaptieren der Lösungszugänge. Geeignete Heurismen in der Primarstufe sind vor allem das systematische Probieren, das Nutzen von Analogien oder das Rückwärtsarbeiten, das Erstellen von Skizzen und das Nutzen von Tabellen.

Die Schülerinnen und Schüler

- entwickeln Lösungsideen zu Aufgaben, zu denen bislang keine Lösungsroutinen bekannt sind,
- entwickeln Lösungsstrategien (z. B. systematisches Probieren, Analogien nutzen), wählen heuristische Hilfsmittel aus und nutzen diese (z. B. Tabellen),
- überdenken Vorgehensweisen und passen diese gegebenenfalls an.

Mathematisch modellieren

Beim mathematischen Modellieren geht es um das Lösen eines Sachproblems mit Hilfe der Mathematik, das einen Bezug zur Realität der Schülerinnen und Schüler aufweist und das eine Auseinandersetzung mit dem Kontext erfordert. Von besonderer Bedeutung ist das Übersetzen zwischen Realsituationen und mathematischen Begriffen, Resultaten oder Methoden. Typische Teilschritte des Modellierens sind das Strukturieren und Vereinfachen der gegebenen Realsituation, das Übersetzen des Sachproblems in mathematische Sprache und das Interpretieren sowie Prüfen der mathematischen Ergebnisse bzw. des Modells im Hinblick auf Stimmigkeit und Angemessenheit bezogen auf die Realsituation. Das Spektrum reicht vom Erfassen mathematisch bedeutsamer Informationen im Sachkontext bis hin zum Entwickeln und Formulieren von Sachaufgaben zu mathematischen Sachverhalten.

Die Schülerinnen und Schüler

- entnehmen die für die mathematische Bearbeitung einer Fragestellung relevanten Informationen u. a. aus Texten, Darstellungen, der Lebenswirklichkeit,
- übersetzen Sachprobleme in die Sprache der Mathematik und prüfen und interpretieren die mathematische Lösung in Bezug auf die Ausgangssituation,
- formulieren zu Termen, Gleichungen und bildlichen Darstellungen Sachaufgaben.

Mathematisch darstellen

Diese Kompetenz umfasst das Auswählen von sowie das verständige Umgehen mit bildlichen, symbolischen, materiellen, verbal-sprachlichen sowie grafisch-visuellen und tabellarischen Darstellungen, die mathematische Objekte und Sachverhalte repräsentieren. Von besonderer Bedeutung ist das Vernetzen von mathematischen Darstellungen. Das Spektrum reicht von Anwenden, Interpretieren und Unterscheiden mathematisch bedeutsamer Darstellungen über das Erstellen von und Wechseln zwischen geeigneten mathematischen Darstellungen bis hin zu deren kritischen Reflexion.

Die Schülerinnen und Schüler

- wählen geeignete Darstellungsformen für das Bearbeiten mathematischer Fragestellungen aus und nutzen und entwickeln diese,
- übertragen eine Darstellungsform in eine andere,
- vergleichen Darstellungsformen miteinander und bewerten diese.

Mit mathematischen Objekten und Werkzeugen arbeiten

Diese Kompetenz beinhaltet den fachlich sicheren Umgang mit den im Mathematikunterricht der Primarstufe relevanten mathematischen Objekten (z. B. arithmetisch: u. a. Zahlen, Symbole, Terme, Gleichungen; geometrisch: u. a. Ecken, Kanten, Formen, Winkel, Symmetrieachsen) und den adäquaten Einsatz mathematischer Werkzeuge (u. a. Lineal, Zirkel, Taschenrechner, Apps). Hierzu verknüpfen die Schülerinnen und Schüler alltagsgebundene Sprechweisen mit symbolischen und formalen Ausdrucksweisen und nutzen diese fachlich angemessen. Das Spektrum reicht vom sicheren und adressatengerechten Verwenden mathematisch geeigneter Begriffe und Zeichen bis hin zum flexiblen und sachgerechten Umgang mit mathematischen Objekten und Werkzeugen. Diese Kompetenz beinhaltet auch Fakten- und Regelwissen für ein zielgerichtetes und effizientes Bearbeiten von mathematischen Aufgabenstellungen.

Die Schülerinnen und Schüler

- übersetzen symbolische und formale Sprache in Alltagssprache und umgekehrt,
- verwenden mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht,
- verwenden mathematische Objekte (z. B. Zahldarstellungen, Terme, Ecken, Kanten, Tabellen, Diagramme) bei der Bearbeitung mathematischer Aufgaben- und Problemstellungen sicher und flexibel,
- setzen mathematische Werkzeuge (z. B. Zeichenwerkzeuge, digitale Werkzeuge) sachgerecht ein.

4. Inhaltsbezogene Kompetenzen

Die inhaltsbezogenen Kompetenzen orientieren sich an fünf mathematischen Leitideen, die für den gesamten Mathematikunterricht – für den Primarbereich und für das weiterführende Lernen – bedeutsam sind und einen stringenten Aufbau der Inhalte über die Schulstufen hinweg ermöglichen.

Abbildung 3: Grafische Darstellung des Zusammenwirkens von prozessbezogenen und inhaltsbezogenen Kompetenzen mit Fokussierung auf die Inhaltsbezogenen Kompetenzen

Die Leitidee „Muster, Strukturen und funktionaler Zusammenhang“ nimmt eine besondere Rolle unter den Leitideen ein. Sie greift den Wesenskern der Mathematik auf, grundlegende Regel- und Gesetzmäßigkeiten inhaltlich zu erfassen, zu erklären und zur Problemlösung zu nutzen. Zugleich hat das Erkennen von Mustern, Strukturen und funktionalen Zusammenhängen eine übergeordnete Bedeutung für die Leitideen „Zahl und Operation“, „Raum und Form“, „Größen und Messen“ sowie „Daten und Zufall“, denn Mathematik wird in der aktiven Erkundung von vielschichtigen Beziehungen in unterschiedlichen inhaltsbezogenen Bereichen gelernt. Muster, Strukturen und funktionale Zusammenhänge stehen deshalb beim Erwerb aller inhaltsbezogenen Kompetenzen regelmäßig im Mittelpunkt der Auseinandersetzung mit den Inhalten. Innerhalb der Leitideen „Zahl und Operation“, „Raum und Form“, „Größen und Messen“ sowie „Daten und Zufall“ werden deshalb inhaltsbezogene Kompetenzen mit einem engen Bezug zur Leitidee „Muster, Strukturen und funktionaler Zusammenhang“ im Folgenden explizit ausgewiesen (gelbe Schattierung).
Am Ende von Jahrgangsstufe 4 sollen die Schülerinnen und Schüler über folgende inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen verfügen (die Reihenfolge der Auflistung gibt keine Gewichtung vor):

Leitidee Zahl und Operation

Diese Leitidee umfasst den Aufbau von und den verständnisorientierten Umgang mit Vorstellungen zu Zahlen und Operationen sowie deren Beziehungen zueinander ebenso wie das sichere Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren unter sinntragender und flexibler Nutzung von Rechenstrategien, Rechengesetzen und Kontrollverfahren. Dazu gehört auch das sichere Verständnis der für die Primarstufe zentralen schriftlichen Algorithmen wie auch das sachgerechte Rechnen in und mit Kontexten.

Zahldarstellungen und Zahlbeziehungen verstehen

Die Schülerinnen und Schüler

- erkennen, erklären und nutzen den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems (z. B. Bündelungsprinzip, Stellenwertprinzip),
- stellen Zahlen bis 1 000 000 auf verschiedene Weise dar (z. B. Anschauungsmittel, Stufenschrift, Stellenwerttabelle, Zifferndarstellung) und setzen diese zueinander in Beziehung,
- orientieren sich im Zahlenraum bis 1 000 000 (z. B. Zahlen der Größe nach ordnen, Nachbarzahlen bestimmen).

Rechenoperationen verstehen und beherrschen

Die Schülerinnen und Schüler

- verfügen über ein Operationsverständnis zu den vier Grundrechenarten und erkennen und nutzen die Zusammenhänge zwischen den Operationen,
- beherrschen die Grundaufgaben des Kopfrechnens (u. a. Zahlzerlegungen, Einspluseins, Einmaleins) gedächtnismäßig und leiten deren Umkehrungen sicher ab,
- übertragen die Grundaufgaben des Kopfrechnens auf analoge Aufgaben im Zahlenraum bis zur Million,
- verstehen mündliche und halbschriftliche Rechenstrategien zu den vier Grundrechenarten und setzen diese flexibel ein,
- beschreiben, vergleichen und bewerten verschiedene Rechenwege; finden, erklären und berichtigen Rechenfehler,
- erkennen, erklären und nutzen Rechengesetze (z. B. Kommutativgesetz: Tauschaufgaben),
- verstehen schriftliche Verfahren der Addition, Subtraktion und Multiplikation, beschreiben den Algorithmus, führen diesen geläufig aus und wenden ihn bei geeigneten Aufgaben an,
- kontrollieren Lösungen durch geeignete Vorgehensweisen (z. B. Überschlagsrechnung, Umkehroperation).

Rechenoperationen in Kontexten anwenden

Die Schülerinnen und Schüler

- wenden bei Sachaufgaben Rechenoperationen an und beschreiben die Beziehungen zwischen der Sache und den einzelnen Lösungsschritten,
- runden und überschlagen sachadäquat.

Leitidee Größen und Messen

Diese Leitidee fokussiert den sinnstiftenden mathematischen Umgang mit Größen basierend auf tragfähigen Größenvorstellungen. Sie umfasst den Verständniserwerb des Grundprinzips des Messens, das Bestimmen und Vergleichen von Größen und die sachadäquate Anwendung der erworbenen Kompetenzen zu Größen in Kontexten. Dabei spielen neben den in der Primarstufe bedeutsamen Größen Geldwerte, Längen, Zeitspannen und Massen weitere Größen wie Flächeninhalte und Volumina (Rauminhalte und Hohlmaße) eine Rolle.

Über Größenvorstellungen verfügen

Die Schülerinnen und Schüler

- vergleichen und ordnen Größen (Geldwerte, Längen, Zeitspannen, Massen, Flächeninhalte und Volumina),
- kennen Standardeinheiten (zu Geldwerten, Längen, Zeitspannen, Hohlmaßen und zur Masse) und setzen diese im jeweiligen Größenbereich zueinander in Beziehung,
- entwickeln und nutzen Vorstellungen über Repräsentanten für Standardeinheiten und im Alltag bedeutsame Größen (z. B. Höhe der Tür, Dauer der Schulstunde),
- kennen und verstehen im Alltag gebräuchliche einfache Brüche im Zusammenhang mit Größen (z. B. $\frac{1}{2}$ m, Dreiviertelstunde, $\frac{1}{4}$ l).

Größen messen und Maßangaben bestimmen

Die Schülerinnen und Schüler

- verstehen und nutzen (u. a. Flächeninhalte durch Auslegen mit Einheitsquadraten, Rauminhalte durch Messen mit Einheitswürfeln) das Grundprinzip des Messens (nicht-standardisierte und standardisierte Einheitsmaße auswählen, wiederholt nutzen und ggf. in Beziehung zu Untereinheiten setzen),
- messen Längen, Zeitspannen, Massen und Hohlmaße mit geeigneten Einheiten und unterschiedlichen Messgeräten sachgerecht,
- benennen Größenangaben mit verschiedenen Einheiten und stellen diese in unterschiedlichen Schreibweisen (z. B. 2,5 km | 2500 m | 2 km 500 m) dar.

Mit Größen in Kontexten umgehen

Die Schülerinnen und Schüler

- schätzen Größen sachadäquat und mit Bezug zu geeigneten Repräsentanten,
- rechnen in Sachsituationen angemessen mit Näherungswerten und prüfen Ergebnisse auf Plausibilität,
- lösen Sachaufgaben mit Größen.

Leitidee Muster, Strukturen und funktionaler Zusammenhang

Die Leitidee zielt in besonderer Weise auf die fachlich fundierte Erkundung von mathematischen Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten zwischen Zahlen, Formen und Größen

sowie deren Darstellungen und Eigenschaften. Ein Muster gleicht dabei eher einem Phänomen, in dem man eine Struktur – den Kern eines mathematischen Beziehungsgefüges – erkennen kann. Bei der Auseinandersetzung mit mathematischen Mustern und Darstellungen werden mathematisch relevante Strukturen (z. B. funktionale Beziehungen, Sortierungen, Ordnungen) erfasst und beschrieben, die dann wiederum in verschiedenen mathematischen Kontexten genutzt werden können.

Gesetzmäßigkeiten erkennen, beschreiben und darstellen

Die Schülerinnen und Schüler

- verstehen und nutzen Strukturen in arithmetischen und geometrischen Darstellungen (z. B. in Zahldarstellungen, Anschauungsmitteln)
- erkennen und beschreiben Strukturen in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. Zahlenfolgen, Pentominos) und nutzen diese in mathematischen Kontexten (z. B. Verschlüsselungen),
- erkennen, stellen Gleichheit von mathematischen Ausdrücken dar und nutzen diese (z. B. Zahlen durch verschiedene Terme ausdrücken, Terme vergleichen).

Funktionale Beziehungen erkennen, beschreiben und darstellen

Die Schülerinnen und Schüler

- erkennen und beschreiben funktionale Beziehungen in Sachsituationen (z. B. Menge - Preis),
- erkennen, beschreiben und stellen funktionale Beziehungen in Tabellen dar,
- lösen Sachaufgaben zu funktionalen Zusammenhängen (z. B. Proportionalität).

Leitidee Raum und Form

Diese Leitidee ist auf die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens gerichtet und beinhaltet den Umgang mit Objekten in Ebene und Raum sowie darauf bezogene Prozesse wie das geometrische Abbilden. Konkrete Handlungserfahrungen werden vertieft, systematisch geordnet, genutzt und spiralcurricular erweitert. Übergreifend spielen dabei das Begriffsverständnis und das geometrische Zeichnen eine Rolle, indem Eigenschaften und Beziehungen in den Mittelpunkt rücken und geometrische Objekte mit geeigneten Medien (einschließlich digitaler Mathematikwerkzeuge) dargestellt werden.

Über räumliches Vorstellungsvermögen verfügen

Die Schülerinnen und Schüler

- orientieren sich im Raum (z. B. Wege, Pläne, Ansichten),
- erkennen, beschreiben und nutzen räumliche Beziehungen (z. B. zwei- und dreidimensionale Darstellungen zueinander in Beziehung setzen, wie Bauplan und Bauwerk, Körper und Netz),
- operieren (z. B. zerlegen, falten, drehen, spiegeln, bauen) mit geometrischen Objekten gedanklich.

Geometrische Figuren erkennen, benennen und darstellen

Die Schülerinnen und Schüler

- klassifizieren Körper und ebene Figuren nach Eigenschaften, ordnen Fachbegriffe zu und beschreiben Beziehungen zwischen geometrischen Figuren (z. B. Quadrat und Rechteck),
- erkennen Körper und ebene Figuren in der Umwelt wieder,
- stellen Modelle von Körpern (Vollmodelle, Flächenmodelle, Kantenmodelle) und ebenen Figuren her und untersuchen (z. B. bauen, legen, zerlegen, zusammenfügen, ausschneiden, falten) diese, auch unter Nutzung digitaler Werkzeuge,
- untersuchen und vergleichen ebene Figuren und Körper (ebene Figuren auch hinsichtlich des Umfangs und Flächeninhalts, Körper auch hinsichtlich des Rauminhalts),
- fertigen Zeichnungen geometrischer Figuren mit und ohne Hilfsmittel an, auch unter Nutzung digitaler Werkzeuge.

Geometrische Abbildungen erkennen, benennen und darstellen

Die Schülerinnen und Schüler

- bilden ebene Figuren geometrisch ab (verkleinern, vergrößern und spiegeln),
- erkennen und beschreiben Eigenschaften der Achsensymmetrie und setzen diese mit der Achsenspiegelung in Beziehung,
- erkennen und beschreiben geometrische Abbildungen in der Umwelt oder in Mustern (z. B. in Bandornamenten).

Leitidee Daten und Zufall

Diese Leitidee umfasst die Erfassung, Ermittlung, systematische Betrachtung und Interpretation von Daten sowie die datenbasierte Erkundung von Zufallserscheinungen im Alltag und von Experimenten. Daten aus unterschiedlichen Größenbereichen und Sachzusammenhängen sind die Grundlage für eine systematische Betrachtung von Ereignissen und deren Auftreten in der Lebenswirklichkeit. Die quantitative Ermittlung von Häufigkeiten (*Wie oft?*) spielt hierbei eine zentrale Rolle. Häufigkeiten stehen wiederum in engem Zusammenhang mit kombinatorischen Überlegungen (*Wie viele Möglichkeiten?*) und der Einschätzung dazu, wie wahrscheinlich es sein könnte, dass ein Ereignis eintritt (*Wie viele Möglichkeiten für ein Ereignis im Vergleich zu einem anderen?* und Schlussfolgerungen daraus: *Wie sind die Gewinnchancen?*). Hierbei stellt die kritische Reflexion von Darstellungen eine Voraussetzung für einen mündigen Umgang mit Daten dar.

Mit Daten umgehen

Die Schülerinnen und Schüler

- planen einfache Befragungen und erfassen und strukturieren bei Beobachtungen, Untersuchungen und einfachen Experimenten Daten,
- stellen Daten in Tabellen, Schaubildern und Diagrammen dar, auch unter Nutzung digitaler Werkzeuge, und entnehmen Informationen aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen,
- interpretieren Darstellungen von Daten und reflektieren diese kritisch,
- lösen einfache kombinatorische Fragestellungen durch systematisches Vorgehen (z. B. systematisches Probieren) oder mit Hilfe von heuristischen Hilfsmitteln (z. B. Skizze, Baumdiagramm, Tabelle).

Ereignisse bei Zufallsexperimenten untersuchen

Die Schülerinnen und Schüler

- kennen und nutzen Grundbegriffe zur Beschreibung von Zufallsereignissen (sicher, möglich, unmöglich),
- schätzen Chancen für das Eintreten von Ereignissen bei alltäglichen Phänomenen oder einfachen Zufallsexperimenten ein und vergleichen (z. B. "ist wahrscheinlicher als", „hat größere Chancen als“) diese datenbasiert.